

Друштво математичара Србије  
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

03.02.2001.

Четврти разред – А категорија

1. Доказати једнакост:

$$n! = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n.$$

2. На кружници је распоређено неколико реалних бројева. Ако су  $a, b, c, d$  четири броја која тим редом стоје један за другим на кружници и ако је  $(a-d)(b-c) > 0$ , дозвољено је заменити  $b$  и  $c$ . Доказати да после неколико корака неће бити могуће извести ниједну такву замену.
3. Наћи најмањи природан број  $n$  такав да се број  $7777n$  у декадном запису записује само јединицама.
4. Нека је  $p$  полином са целобројним коефицијентима такав да је  $p(5) = -8$ ,  $p(7) = -2$  и  $p(12) = 13$ . Доказати да он не може имати целобројних нула.
5. Нека су  $r_1, r_2, \dots, r_m$  рационални бројеви из интервала  $(0, 1)$  чији је збир 1. За сваки природан број  $n$  нека је  $f(n) = n - \sum_{k=1}^m [r_k n]$ . Одредити највећу и најмању вредност коју може узети  $f(n)$  за природне бројеве  $n$ .

Време за рад 180 минута.