

Друштво математичара Србије
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

05.02.2000.

Трећи разред – А категорија

1. Колико има функција $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ за које важи $f(1) \leq f(2) \leq \dots \leq f(n)$?
2. Решити једначину $\sin^3 x + \sin^3 2x + \sin^3 3x = (\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^3$.
3. Дат је полиедар површине S у који се може уписати сфера и око кога се може описати сфера. Сфера уписана у овај полиедар има полупречник r , а сфера описана око полиедра полупречник R . Доказати да важи

$$R > \sqrt[3]{\frac{rS}{4\pi}}.$$

4. Нека је O центар описаног круга датог оштроуглог троугла ABC . Ако су A_1 , B_1 и C_1 редом средишта страница BC , AC и AB овог троугла, доказати да је $OA_1 + OB_1 + OC_1 = R + r$, где је R полупречник описаног круга око троугла ABC , а r је полупречник уписаног круга у исти троугао.
5. Доказати да је, за сваки природан број n , број $\left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^n + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ цео.

Време за рад 180 минута.